Compito 1

1. Utilizzando il tuo sistema di prova preferito dimostra formalmente la seguente tautologia:

   o non esistono venusiani, oppure ne esiste uno tale che, se non respira lui allora nessun venusiano respira.

2. Si consideri il gruppo $M = \mathbb{Z}^n$ con $n \in \mathbb{N}$ ed $n \geq 1$. Per ogni elemento $v \neq 0$ di M, si dimostri che esiste un sottogruppo $N(v)$ tale che $M/N(v)$ è finito e $v + N(v) \neq N(v)$. Posto $\mathcal{A} = \{N \leq M \mid |M/N| < \infty\}$, si provi che $0 = \cap_{N \in \mathcal{A}} N$. Per ogni sottogruppo N di M si definisca $I(N) = \{a \in M \mid na \in N \text{ per qualche } n \in \mathbb{Z}\}$. Provare che $I(N) \leq M$ e che $M/I(N)$ è senza torsione. Si dimostri infine che $I(N)$ è l'intersezione di tutti i sottogruppi di M che contengono $I(N)$ ed hanno indice finito.

3. Siano $\mathbb{K} \mid \mathbb{F}$ un'estensione di Galois e $G = \mathcal{G}al(\mathbb{K} \mid \mathbb{F})$. Supponiamo che G sia semplice non abeliano. Dimostrare che non esiste alcun sottocampo intermedio $\mathbb{E}$ tale che $|\mathbb{E} : \mathbb{F}| = 2$.

4. Sia data in $\mathbb{R}^3$ la circonferenza definita da $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, \;\; z = 0\}$ e sia $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z = 0\}$ l'asse delle y. Si consideri lo spazio topologico $X = C \cup A$ dotato della topologia indotta da $\mathbb{R}^3$.

   a) Si calcoli il gruppo fondamentale $\Pi_1(X)$ dello spazio X e se ne esibisca un insieme di generatori.

   Sia ora $Y = \mathbb{R}^3 \backslash X$ il complementare di X in $\mathbb{R}^3$.

   b) Si calcoli il gruppo fondamentale $\Pi_1(Y)$ dello spazio Y e se ne esibisca un insieme di generatori.

5. Siano $w_1, \ldots w_n$ vettori di $\mathbb{R}^n$. Sia G la matrice $n \times n$ con coefficienti $g_{ij} = w_i \cdot w_j$ (prodotto scalare tra w_i e w_j).

   a) Si provi che i vettori $w_1, \ldots w_n$ formano una base di $\mathbb{R}^n$ se e solo se G è invertibile.

   b) Si provi che i vettori $w_1, \ldots w_n$ formano una base di $\mathbb{R}^n$ se e solo se G è definita positiva.

6. Siano $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ il disco unitario del piano complesso, $a \in \Delta$ e $f \colon \Delta \to \Delta$ una funzione olomorfa tale che $f(a) = a$.

   a) Si dimostri che esiste un automorfismo ϕ di Δ (ossia una funzione olomorfa $\phi\colon \Delta \to \Delta$ biiettiva con inversa olomorfa) tale che $\phi(a) = 0$.

   b) Si dimostri che $|f'(a)| \leq 1$ e che $|f'(a)| = 1$ se e solo se f è un automorfismo di Δ.

   c) Si dimostri che se $f'(a) = 1$ allora $f = Id_\Delta$.

7. Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = \sin a_n, \qquad n = 1, 2, \dots . \end{cases}$$

   (i) Dimostrare che $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge e calcolare il limite.

   (ii) Calcolare il $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_n^2} - \frac{1}{a_{n+1}^2}\right)$.

   (iii) Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\alpha}$ al variare di $\alpha > 0$.

8. Sia $g(r) = \left(\frac{2^r+4^r+27^r}{3}\right)^{1/r}$ definita per $r \neq 0$.

   (i) Dimostrare che g si puo' estendere con continuità in $r = 0$.

   (ii) Calcolare i $\lim_{r\to\infty} g(r)$ e $\lim_{r\to-\infty} g(r)$.

   (iii) Dimostrare che g è crescente.

9. Se X_i, $i = 1, \dots, n$, sono i risultati di n prove indipendenti successive ognuna con probabilitá di successo p (e di insuccesso $1 - p$) calcolare

   (1) la probabilitá di almeno due successi consecutivi, esplicitando poi il valore di tale probabililtá per $n = 5$ e $p = 1/2$;

   (2) la probabilitá di almeno due successi consecutivi sapendo che gli insuccessi sono tutti isolati.

10. Due giocatori scelgono indipendentemente un punto a caso sull'asse reale positivo con distribuzioni esponenziali di parametri λ e μ. Se nessun valore é piú del doppio dell'altro, il giocatore che ha scelto il valore maggiore riceve dall'altro giocatore la differenza tra i due valori. Altrimenti non si fa nessuna transazione finanziaria.

    Indicare l'espressione del guadagno atteso dai giocatori, mostrando esplicitamente che il gioco é equo per $\lambda = \mu$.

11. Si consideri un piano verticale ed una sua retta orizzontale r. Sopra r, giacendo nel piano, rotola senza strisciare la circonferenza materiale omogenea γ avente densità $\rho > 0$ e raggio R. Su un diametro di γ, ritenuto di massa trascurabile, si muove senza attrito un punto materiale pesante P di massa m.

    (i) Determinare quanti e quali sono i gradi di libertà del sistema costituito da γ e P, e qualche integrale primo del moto.

    (ii) Fornire la espressione della lagrangiana in funzione delle coordinate scelte.

12. Sia $\Omega = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^3 |\, x > 0\}$; si consideri il problema $\Delta u = 0$ in Ω, $u = f$ su $\partial\Omega$.

(i) Quale è la funzione di Green costruita con il metodo delle immagini elettrostatiche?

(ii) Fornire soluzioni del problema nei casi (i) $f(x) = 1$, e (ii) $f(x) = y$.

13. Data una matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, è noto che è possibile determinare una matrice ortogonale
$$Q = (\mathbf{q}_1, \ldots, \mathbf{q}_n),$$
tale che
$$Q^T AQ = T \equiv \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & \\ \beta_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}.$$
Dimostrare che questa fattorizzazione equivale a definire la relazione di ricorrenza
$$A\mathbf{q}_i = \beta_i \mathbf{q}_{i+1} + \alpha_i \mathbf{q}_i + \beta_{i-1}\mathbf{q}_{i-1}, \qquad i = 1, \ldots, n,$$
dove, per convenzione, si pone
$$\beta_0 = \beta_n = 0.$$
Utilizzare questa relazione di ricorrenza per definire una procedura che, assegnato il vettore $\mathbf{q}_1$, produca formalmente gli altri elementi necessari per ottenere la fattorizzazione richiesta.

14. Assegnato $\alpha > 0$, la procedura
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{\alpha}{x_n}\right), \qquad n = 0, 1, \ldots,$$
in cui $x_0 > 0$ sia assegnato, definisce un metodo iterativo di approssimazione per $\sqrt{\alpha}$. Se l'errore relativo iniziale vale 10^{-1}, dopo quante iterazioni (e perchè) si raggiunge la massima accuratezza possibile, se si utilizza un calcolatore con precisione di macchina $\varepsilon \approx 10^{-16}$?